

## 12 Ugao između dvije krive na površi

Ugao između dvije krive na površi definira se kao ugao između njihovih tangenata u presječnoj tački  $M$ .

Neka su zadane krive  $\alpha$  i  $\beta$  sa

$$\alpha : \vec{r}_1(t) = \vec{r}(u(t), v(t)), \quad \text{tj. } u = u(t), v = v(t);$$

$$\beta : \vec{r}_2(t) = \vec{r}(\bar{u}(t), \bar{v}(t)), \quad \text{tj. } u = \bar{u}(t), \bar{v} = v(t);$$

tada su njihovi tangentni vektori dati s:

$$\dot{\vec{r}}_1 = \frac{d\vec{r}_1}{dt} = \vec{r}_u \frac{du}{dt} + \vec{r}_v \frac{dv}{dt}, \quad \dot{\vec{r}}_2 = \frac{d\vec{r}_2}{dt} = \vec{r}_u \frac{d\bar{u}}{dt} + \vec{r}_v \frac{d\bar{v}}{dt}.$$

Ugao  $\omega$  između dvije krive na plohi u presječnoj tački  $M$  jednak je tada

$$\cos \omega = \frac{d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2}{|d\vec{r}_1| |d\vec{r}_2|} = \frac{d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2}{\sqrt{d\vec{r}_1^2} \sqrt{d\vec{r}_2^2}}, \quad \text{tj.}$$

$$\cos \omega = \frac{Edu d\bar{u} + F(dud\bar{v} + dv d\bar{u}) + Gdv d\bar{v}}{\sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2} \sqrt{E d\bar{u}^2 + 2F d\bar{u} d\bar{v} + G d\bar{v}^2}}$$

gdje su

$$d\vec{r} = d\vec{r}_u du + d\vec{r}_v dv, \quad d\vec{r}_1 = d\vec{r}_u d\bar{u} + d\vec{r}_v d\bar{v}$$

(napomena: Gausove veličine  $E$ ,  $F$  i  $G$  računamo u tački  $M$ ).

Specijalni slučajeви:

(a) Ugao između krivih na površi i  $u$ -krive dan je izrazom (tada je  $\beta$   $u$ -kriva, tj.  $\bar{v} = \text{const.}$ ,  $d\bar{v} = 0$ ):

$$\cos \omega = \frac{Edu + Fdv}{\sqrt{E} \sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}}$$

(b) Ugao između krivih na površi i  $v$ -krive dan je izrazom (tada je  $\beta$   $v$ -kriva, tj.  $\bar{u} = \text{const.}$ ,  $d\bar{u} = 0$ ):

$$\cos \omega = \frac{Edu + Gdv}{\sqrt{G} \sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}}$$

(c) Ugao između koordinatnih  $u$  i  $v$ -krivih dan je izrazom (tada je kriva  $\alpha$   $u$ -kriva, tj.  $v = \text{const.}$ ,  $dv = 0$ , a kriva  $\beta$   $v$ -kriva, tj.  $\bar{u} = \text{const.}$ ,  $d\bar{u} = 0$ ):

$$\cos \omega = \frac{F}{\sqrt{EG}}$$

(d) Ako su krive  $\alpha$  i  $\beta$  na površi međusobno okomite, tada je

$$Edu d\bar{u} + F(dud\bar{v} + dv d\bar{u}) + Gdv d\bar{v} = 0.$$

(e) Uslov okomitosti koordinatnih  $u$  i  $v$  krivih prema  $c$  glasi

$$F = 0.$$

5. Naći ugao pod kojim se sijeku krive

$$x = x_0, y = y_0 \text{ na površi } z = axy.$$

**6.** Na površi (sfera)

$$\vec{r} = (a \cos v \sin u, a \sin v \sin u, a \cos u), \quad u \in [0, \pi], v \in [0, 2\pi],$$

zadane su dvije krive  $c_1$  i  $c_2$  sa  $c_1 : u = v$  i  $c_2 : \bar{u} + \bar{v} = \frac{\pi}{2}$ .

(a) Naći presječne tačke datih krivih.

(b) Odrediti ugao pod kojim se date krive sijeku.

**7.** Površ  $\Gamma$  definisana je vektorskom jednačinom

$$\vec{r} = (u \sin v, u \cos v, v).$$

Na površi je zadan krivoliniski trougao

$$0 \leq u \leq \operatorname{sh} v, \quad 0 \leq v \leq v_0.$$

Izračunati uglove trougla.